أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

الأعداد الحقيقية

مراجعة :

مجموعة أعداد العد : ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

مجموعة الأعداد الطبيعية : ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

مجموعة الأعداد الصحيحة : ص = { .... ، −٣ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

مجموعة الأعداد النسبية : ن = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ }

القيمة المطلقة للعدد النسبى : | −٥ | = ٥ ، | ٥ | = ٥ ، | صفر | = صفر

إذا كان : | س | = ٥ فإن : س = ± ٥

العدد النسبى المربع الكامل :

هو العدد الموجب الذى يمكن كتابته على صورة مربع عدد نسبى أى (عدد نسبى)^{٢}

مثل : ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، .....

، ١.٤٤ ، ١.٦٩ ، ..... ، $\frac{٩}{١٦}$ ، ٢ $\frac{١}{٤}$ ، .....

العدد النسبى المكعب الكامل :

هو العدد النسبى الذى يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبى أى (عدد نسبى)^{٣}

مثل : ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، .....

، −١ ، −٨ ، −٢٧ ، ..... ، ٠.٠٦٤ ، $\frac{٢٧}{١٢٥}$ ، .....

الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل :

** الجذر التربيعى للعدد النسبى الموجب س هو العدد الذى مربعه يساوى س

** لأى عدد نسبى س > ٠ يكون : $\sqrt{س^{٢}}$ = س ، −$\sqrt{س^{٢}}$ = −س

فمثلاً : $\sqrt{٦٤}$ = ٨ ، −$\sqrt{٦٤}$ = −٨

، ± $\sqrt{٦٤}$ = ± ٨ " يدل على الجذرين التربيعيين لعدد ٦٤ "

** $\sqrt{صفر}$ = صفر

** كل عدد نسبى مربع كامل له جذران تربيعيان كل منهما معكوسا جمعيا للآخر ومربع كل منهما هو العدد المربع الكامل

** $\sqrt{(\frac{أ}{ب})^{٢}}$ = | $\frac{أ}{ب}$ | فمثلاً $\sqrt{(−٥)^{٢}}$ = | −٥ | = ٥

** المعادلة التربيعية : س^{٢} = أ^{٢} لها حلان هما { أ ، −أ }

فمثلاً : مجموعة حل المعادلة : س^{٢} = ٩ هى : { ٣ ، −٣ }

** العدد النسبى السالب ليس له جذر تربيعى

فمثلاً : $\sqrt{−٤}$ ليس له جذر تربيعى

** لإيجاد الجذر التربيعى لأى عدد يمكن تحليله إلى عوامله الأولية ، يمكن إستخدام الآلة الحاسبة

تدريبات :

أكمل ما يلى :

(١) $\sqrt{٢٥}$ = ...

(٢) $\sqrt{.....}$ = ٧

(٣) $\sqrt{س^{٢}}$ = ...

(٤) $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ...

(٥) $\sqrt{٢\frac{١}{٤}}$ = ...

(٦) **مجموعة حل المعادلة :** ٥ س + ١ = ١١ فى ط هى .....

(٧) **مجموعة حل المعادلة :** ٣ س = ٩ فى ط هى .....

(٨) **مجموعة حل المعادلة :** ٢ س + ٣ = ١ فى ص هى .....

(٩) **مجموعة حل المعادلة :** ٤ س – ٣ = ٢ فى ح هى .....

(١٠) **مجموعة حل المعادلة :** $س^{٢}$ = ٤ فى ح هى .....

(١١) **مجموعة حل المعادلة :** $س^{٢}$ + ٣ = ١٩ فى ح هى .....

(١٢) **مجموعة حل المعادلة :** ٩ $س^{٢}$ = ٤ فى ح هى .....

(١٣) | –٥ | + | ٥ | = ...

(١٤) | –٢ | + | –٣ | = ...

(١٥) | ٥ – ٢ | = ...

(١٦) | ٣ – ٧ | = ...

(١٧) إذا كان : | س | = ٣ فإن : س = ...

(١٨) إذا كان : |س| – ١ = ٣ فإن : س = ...

(١٩) $\sqrt{١٧٦٤}$ = ...

(٢٠) $\sqrt{١٢٩٦}$ = ...

(٢١) **حاصل ضرب أى عدد نسبى فى معكوسه الجمعى** = ...

(٢٢) **حاصل ضرب أى عدد نسبى فى معكوسه الضربى** = ...

(٢٣) **مجموع الجذرين التربيعيين لأى عدد نسبى** = ...

الجذر التكعيبى للعدد النسبى

نعلم أن :

العدد النسبى المكعب الكامل :

هو العدد النسبى الذى يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبى أى $(\text{عدد نسبى})^{٣}$

مثل : ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، .....

، -١ ، -٨ ، -٢٧ ، ..... ، ٠.٠٦٤ ، $\frac{٢٧}{١٢٥}$ ، .....

تعريف :

الجذر التكعيبى للعدد النسبى م هو العدد الذى مكعبه يساوى م

، يرمز للجذر التكعيبى للعدد النسبى م بالرمز : $\sqrt[٣]{\text{م}}$

ملاحظات :

** الجذر التكعيبى لعدد نسبى موجب يكون موجباً فمثلاً : $\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$

** الجذر التكعيبى لعدد نسبى سالب يكون سالباً فمثلاً : $\sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

** $\sqrt[٣]{\text{صفر}} = \text{صفر}$

** $\sqrt[٣]{\text{م}^{٣}} = \text{م}$

** المعادلة التكعيبية : $\text{س}^{٣} = \text{م}^{٣}$ لها حل واحد فقط هو : $\{\text{م}\}$

فمثلاً : مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{٣} = ٨$ هى : $\{٢\}$

، مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{٣} = -٢٧$ هى : $\{-٣\}$

** لإيجاد الجذر التكعيبى لأى عدد يمكن تحليله إلى عوامله الأولية ، يمكن إستخدام الآلة الحاسبة

** العدد النسبى المكعب الكامل له جذر تكعيبى واحد و هو عدد نسبى أيضاً

ملاحظات :

** $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣}} \neq \text{س} + \text{ص}$ ؛ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣}} \neq \text{س} - \text{ص}$

** $\sqrt[٣]{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{٣}}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}_{+}$

** $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}\text{ص}^{٣}} = \sqrt[٣]{(\text{س ص})^{٣}} = \text{س ص}$

تدريب : أكمل ما يأتى :

(١) $\sqrt{٩} + \sqrt[٣]{٦٤} = ...$

(٢) $\sqrt[٣]{٢٧} = \sqrt{.....}$

(٣) $\sqrt{٦٤} = \sqrt[٣]{.....}$

(٤) مجموعة حل المعادلة : $٢\text{س}^{٣} - ٦ = ٤٨$ فى ن هى .....

(٥) مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{٣} + ٥ = ٤$ فى ن هى .....

تمارين

١ ـ أكمل ما يأتى :

(١) $\sqrt[٣]{٠.٠٠٨} = \dots\dots$

(٢) $\sqrt[٣]{-٢٧} = \dots\dots$

(٣) $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} = \dots\dots$

(٤) $\sqrt[٣]{٨} + \sqrt[٣]{-٨} = \dots\dots$

(٥) $\sqrt[٣]{\dots\dots} = ٥$

(٦) $\sqrt[٣]{\dots\dots} = -\frac{١}{٢}$

٢ ـ أوجد الجذر التكعيبى للأعداد الآتية :

٢١٦ ، -٧٢٩ ، ١.٣٣١ ، $\frac{٢٧}{٣٤٣}$ ، $١٥\frac{٥}{٨}$

٣ ـ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ح :

(١) $٣ س^{٣} = ٨١$

(٢) $\frac{١}{٣} س^{٣} = \frac{٢٧}{٢٤}$

(٣) $س^{٣} - ٧ = ٢٠$

(٤) $٨ س^{٣} - ١ = ١٢٤$

(٥) $(س - ٢)^{٣} = ٦٤$

(٦) $(١ - س)^{٣} = ٨$

(٧) $(٥ س - ٢)^{٣} + ٣ = ٣٠$

(٨) $\frac{س^{٣}}{٤} + \frac{س^{٣}}{٢} = ٦$

(٩) $\sqrt[٣]{\sqrt{س} - ٣} = ١$

٤ ـ إذا كان خمس عدد مكعب = ـ ٢٠٠ فما هو العدد ؟؟

أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

مجموعة الأعداد غير النسبية " ن' "

نعلم أن :

** العدد النسبى هو العدد الذى يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠

** الأعداد : ٢ ، -٣ ، ١.٥ ، ١٥ $\frac{٥}{٨}$ ، ..... كل منها عدد نسبى

** الجذور التربيعية لأعداد نسبية على صورة مربعات كاملة هى أعداد نسبية مثل :

$\sqrt{١٦}$ ، $\sqrt{٢\frac{١}{٤}}$ ؛ $\sqrt{١.٤٤}$ ، .....

** الجذور التكعيبية لأعداد نسبية على صورة مكعبات كاملة هى أعداد نسبية مثل :

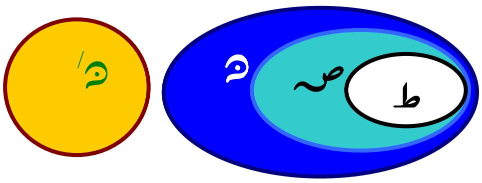
$\sqrt[3]{٨}$ ، $\sqrt[3]{-٢٧}$ ، .....

** الجذور التربيعية و التكعيبية لأعداد ليست مربعات كاملة أو مكعبات كاملة هى أعداد غير نسبية مثل :

$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[3]{٩}$ ، ..... ، النسبة التقريبية π

تعريف : العدد غير النسبى هو العدد الذى لا يمكن وضعه على الصورة

$\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠



** لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لأى من هذه الأعداد

** الأعداد غير النسبية يرمز لها بالرمز ن'

** ن ∩ ن' = $\emptyset$

** $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$ فمثلاً : $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = ٥$

** $\sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{س} = س$ فمثلاً : $\sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٥} = ٥$

** أى عدد غير نسبى تنحصر قيمته بين عددين نسبيين

مثال : أوجد عدد غير نسبى ينحصر بين ٣ ، ٤

الحل

بالتربيع نجد : $(٣)^٢ = ٩$ ، $(٤)^٢ = ١٦$

∵ $١٦ > ١٥ > ١٤ > ١٣ > ١٢ > ١١ > ١٠ > ٩$

∴ $٤ > \sqrt{١٥} > \sqrt{١٤} > \sqrt{١٣} > \sqrt{١٢} > \sqrt{١١} > \sqrt{١٠} > ٣$

∴ كل من : $\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{١١}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{١٣}$ ، $\sqrt{١٤}$ ، $\sqrt{١٥}$
أعداد غير نسبية تنحصر بين ٣ ، ٤

أيضاً بالتكعيب نجد : $٤ > \sqrt[3]{٦٣} > \sqrt[3]{٦٢} > ..... > \sqrt[3]{٣٠} > \sqrt[3]{٢٩} > \sqrt[3]{٢٨} > ٢٧$

∴ كل من : $\sqrt[3]{٢٨}$ ، $\sqrt[3]{٢٩}$ ، $\sqrt[3]{٣٠}$ ، ..... ، $\sqrt[3]{٦٢}$ ، $\sqrt[3]{٦٣}$
أعداد غير نسبية تنحصر بين ٣ ، ٤ أيضاً

** يمكن إيجاد قيم تقريبية للعدد غير النسبى

فمثلاً : لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٢}$

نلاحظ أن : $\sqrt{٢}$ ينحصر بين $\sqrt{١}$ ، $\sqrt{٤}$ أى أن : $٢ > \sqrt{٢} > ١$

نوجد $(١.١)^٢ = ١.٢١$ ، $(١.٢)^٢ = ١.٤٤$

، $(١.٣)^٢ = ١.٦٩$ ، $(١.٤)^٢ = ١.٩٦$ ، $(١.٥)^٢ = ٢.٢٥$

، $١.٦٩ < ٢ < ٢.٢٥$ ∴ $١.٤ < \sqrt{٢} < ١.٥$

∴ أى أن : $\sqrt{٢} = ١.٤ +$ كسر عشرى

أى أن : $١.٤١ < \sqrt{٢} < ١.٤٢$

" يمكن إستخدام الآلة الحاسبة للتأكد من صحة الإجابة "

تدريب :

أثبت أن $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١.٧ ، ١.٨

الحل

** تمثيل بعض الأعداد غير النسبية على خط الأعداد

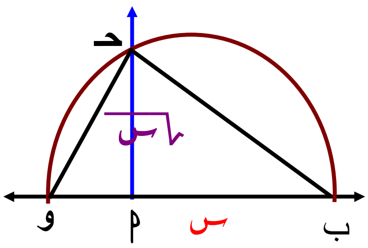
يمكن تمثيل أى عدد غير نسبى على الصورة $\sqrt{س}$ على خط الأعداد حيث س ∈ ص+

نرسم خط الأعداد حيث و تمثل العدد " صفر "

نأخذ نقطة ﺃ على بعد وحدة طول من نقطة و

، نقطة ب على بعد " س + ١ " وحدة طول من نقطة و

ثم نرسم نصف دائرة طول نصف قطرها يساوى $\frac{س + ١}{٢}$ ومركزها منتصف و ب ثم نرسم $\overleftarrow{ﺃ ﺣ}$ ⊥ $\overline{و ب}$



يقطع نصف الدائرة فى ﺣ فيكون طول $\overline{ﺃ ﺣ} = \sqrt{س}$

نفتح الفرجار فتحة تساوى ﺃ ﺣ ونركز فى نقطة و ونعين على خط الأعداد النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{س}$ على يمين نقطة و

، النقطة التى تمثل العدد $-\sqrt{س}$ على يسار نقطة و

فمثلاً : لتمثيل العدد $\sqrt{٢}$ نأخذ س = ٢ وحدة طول ، طول نصف قطر الدائرة = ١.٥ وحدة طول

فيكون : ﺃ ﺣ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول وهكذا

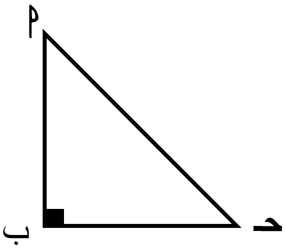
عين النقطة التى تمثل العدد : $١ + \sqrt{٢}$ على خط الأعداد

تدريب : مثل العدد $\sqrt{٣}$ على خط الأعداد ، $١ + \sqrt{٣}$

**** طريقة أخرى لتمثيل العدد غير النسبى $\sqrt{س}$:**

تعتمد على رسم مثلث قائم الزاوية بحيث يكون $\sqrt{س}$ طول الوتر ويكون :

$(\sqrt{س})^٢ = (\sqrt{ص})^٢ + (\sqrt{ع})^٢$ " نظرية فيثاغورث "



حيث : كل من ص ، ع عددين نسبيين مربعين كاملين

فمثلاً : لتمثيل العدد $\sqrt{٢}$

نرسم △ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ١ وحدة طول
، ب حـ = ١ وحدة طول فيكون :

$(أ حـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢ = (١)^٢ + (١)^٢ = ٢$

∴ أ حـ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول

تدريب : إرسم △ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ١ سم ، ب حـ = ٢ سم ثم إستخدم الشكل فى تعيين النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{٥}$ ، كذا العدد $-\sqrt{٥}$ ، $٣ - \sqrt{٥}$

تمارين

١ ــ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) ٥ .... ط (∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄)

(٢) $\sqrt{٥}$ .... ن (∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄)

(٣) ٥٫٥ .... ص (∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄)

(٤) $\sqrt[٣]{١٠٠٠}$ ∈ .... (ط ، ص ، ن ، ن')

(٥) $\sqrt[٣]{١٦}$ ∈ .... (ط ، ص ، ن ، ن')

(٦) مجموعة حل المعادلة : $س^٣ = ٤$ فى ن' هى { .... }
(٤ ، ٢ ، ± ٢ ، $\sqrt[٣]{٤}$)

(٧) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ = ٥$ فى ن' هى { .... }
(٥ ، $\sqrt{٥}$ ، $\pm\sqrt{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$)

(٨) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} =$ ..... (٣ ، ٦ ، ٩ ، $٢\sqrt{٣}$)

(٩) $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} =$ ..... (١ ، ١٤ ، ٧ ، $٢\sqrt{٧}$)

(١٠) $٢\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} =$ ..... (٤ ، ٢ ، ٢٢ ، $٢\sqrt{٢}$)

(١١) $\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٣} =$ ..... (٣ ، ٦ ، ٩ ، $٣\sqrt[٣]{٣}$)

(١٢) مساحة سطح المربع الذى طول ضلعه $\sqrt{٧}$ سم = ... سم^{٢}
($\sqrt{٧}$ ، ٧ ، ١٤ ، $٢\sqrt{٧}$)

(١٣) حجم المكعب الذى طول ضلعه $\sqrt[٣]{٤}$ سم = ... سم^{٣}
($\sqrt[٣]{٤}$ ، ٦٤ ، ٤ ، $٣\sqrt[٣]{٤}$)

(١٤) العدد غير النسبى المحصور بين ٤ ، ٥ هو .....
($\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{١٧}$ ، $\sqrt{٥}$)

٢ ـ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ح$'$:

(١) $س^{٣} - ١ = ٤$ (٢) $\frac{٢}{٣} س^{٣} - ١١ = ٣$

(٣) $٢ س^{٢} = ٦$ (٤) $٢ س^{٢} + ٤ = ٩$

٣ ـ أثبت أن :

(١) $٣.٨٧ < \sqrt{١٥} < ٣.٨٨$

(٢) $٧.١٤ < \sqrt{٥١} < ٧.١٥$

(٣) $٣.٦٠ < \sqrt{١٣} < ٣.٦١$

٤ ـ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى حيث $س \in ص_{+}$:

(١) $س < \sqrt{٧} < س + ١$

(٢) $س < \sqrt{٢٦} < س + ١$

(٣) $س < \sqrt{٨٠} < س + ١$

٥ ـ إرسم خط الأعداد ومثل عليه النقطة التى تمثل الأعداد : $\sqrt{٧}$ ، $-\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٧} + ١$

٦ ـ إرسم △ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٢ سم ، ب حـ = ٣ سم ثم إستخدم الشكل فى تعيين النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{١٣}$ ، كذا العدد $-\sqrt{١٣}$ ، $٣ - \sqrt{١٣}$

٧ ـ أوجد طول ضلع مربع مساحته ١٠ سم^{٢} ثم أوجد طول قطره

٨ ـ أوجد طول حرف مكعب حجمه ٦٤ سم^{٣}

٩ ـ أوجد محيط دائرة مساحتها ٥ π سم^{٢}

مجموعة الأعداد الحقيقية " ح "

مجموعة الأعداد الحقيقية :

هى المجموعة الناتجة من إتحاد المجموعتين ن ، ن/

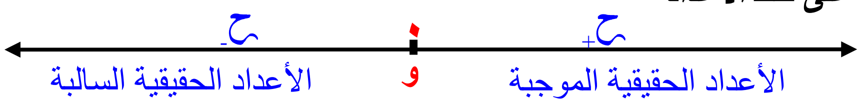
أى أن : ح = ن ∪ ن/

و يلاحظ :

** ن ∩ ن/ = ∅

** ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح ، ن/ ⊂ ح

** كل عدد حقيقى تمثله نقطة واحدة على خط الأعداد



** ح = ح+ ∪ { ٠ } ∪ ح−

** ح+ = { س : س ∈ ح ، س > ٠ }

** ح− = { س : س ∈ ح ، س < ٠ }

** مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = ح+ ∪ { ٠ } = { س : س ∈ ح ، س ≥ ٠ }

** مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = ح− ∪ { ٠ } = { س : س ∈ ح ، س ≤ ٠ }

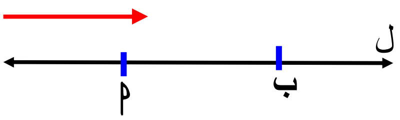
** **علاقة الترتيب فى ح**

مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة مرتبة

فإذا كانت : أ ، ب نقطتان تنتميان للمستقيم ل كما بالشكل المقابل

فإن : ب تلى أ أى تكون على يمينها

، أ تسبق ب لأى تكون على يسارها



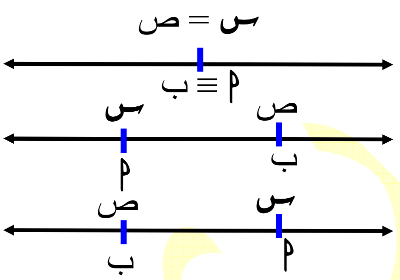
خواص الترتيب :

(١) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين يمثلهما على خط الأعداد النقطتان أ ، ب على الترتيب فإن :

١ – س = ص عندما أ تنطبق على ب

٢ – س < ص عندما أ تسبق ب

٣ – س > ص عندما أ تلى ب



(٢) إذا كان : س عدداً حقيقياً تمثله على خط الأعداد النقطتان أ ، و تمثل العدد صفر فإن :

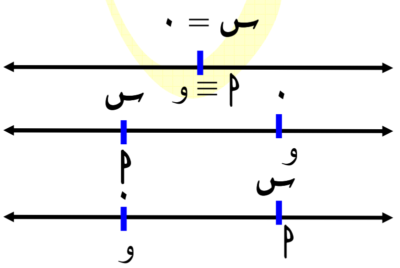
١ – س = ٠ عندما أ تنطبق على و

٢ – س < ٠ عندما أ تقع على يسار و

و يكون س عدداً حقيقياً سالباً

٣ – س > ص عندما أ تلى ب

و يكون س عدداً حقيقياً موجباً



أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

تدريبات :

١ ـ أكمل الجدول الآتى :

العدد	عدد طبيعى	عدد صحيح	عدد نسبى	عدد غير نسبى	عدد حقيقى
٥	✓	✓	✓	✗	✓
$-\frac{١}{٢}$				✗	
$\sqrt{٣}$					
$\lvert ٥ - ٧ \rvert$					
$\sqrt[٣]{٤}$					
١.٣					
$-\sqrt{٤}$					
$\sqrt{-٤}$					
$\sqrt[٣]{٤}$					

٢ ـ رتب الأعداد الآتية تنازلياً :

٦ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt[٣]{-١}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$

٣ ـ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

إذا كان : $\frac{١}{س}$ ، $\frac{س}{\sqrt{٥}}$ عددان حقيقيان يقعان بين صفر ، ١

فإن : س = ...

(١ ؛ ٢ ؛ − ٢ ؛ $\sqrt{٥}$)

الفتـــــــرات

نعلم أن :

يمكن التعبير عن المجموعة س = مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من ١ والأقل من ٥

بطريقة الصفة المميزة كالآتى : س = { أ : أ ∈ ص ، ١ < أ < ٥ }

؛ بطريقة الســـــــرد كالآتـــى : س = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

ولكن هل يمكن التعبير عن هذه المجموعة إذا كانت أ ∈ ح بطريقة السرد ؟؟

الجواب : لا يمكن ذلك لأنه بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية بعضها أعداد نسبية وبعضها الآخر غير نسبية كما أنه لا يمكن تمثيلها على خط الأعداد

لذا تستخدم طريقة أخرى للتعبير عن مثل تلك المجموعات وهى الفترات

تعريف :

الفترة هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

الفتـرات المحدودة

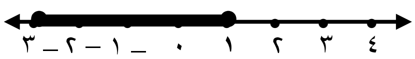
إذا كان : أ ، ب ∈ ح ، أ < ب فإننا نعرف كلاً من :

الفترة المغلقة :

إذا كانت : س = { أ : أ ∈ ح ، −٣ ≤ أ ≤ ١ }

فإن : س = [−٣ ، ١]

ويلاحظ أن : −٣ ∈ س ؛ ١ ∈ س

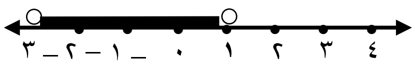


الفترة المفتوحة :

إذا كانت : س = { أ : أ ∈ ح ، −٣ < أ < ١ }

فإن : س =] −٣ ، ١ [

ويلاحظ أن : −٣ ∉ س ؛ ١ ∉ س

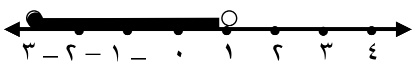


الفترة نصف المفتوحة " نصف المغلقة " :

** إذا كانت : س = { أ : أ ∈ ح ، −٣ ≤ أ < ١ }

فإن : س = [−٣ ، ١ [

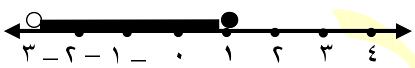
ويلاحظ أن : −٣ ∈ س ؛ ١ ∉ س



** إذا كانت : س = { أ : أ ∈ ح ، −٣ < أ ≤ ١ }

فإن : س =] −٣ ، ١]

ويلاحظ أن : −٣ ∉ س ؛ ١ ∈ س



الفتـرات غير المحدودة

نعلم أن :

** خط الأعداد الحقيقية ممتد من جهيتيه مما يدل على وجود أعداد حقيقية تقع على هذا الخط

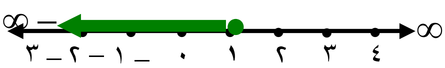
** الرمز " ∞ " مالا نهاية هو أكبر عدد حقيقى يمكن تصوره

** الرمز " − ∞ " سالب مالا نهاية هو أصغر عدد حقيقى يمكن تصوره

** " ∞ ، − ∞ " ∉ ح

(١) س = { أ : أ ∈ ح ، أ ≥ ١ }

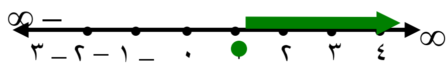
= [١ ، ∞ [



ويلاحظ أن : ١ ∈ س

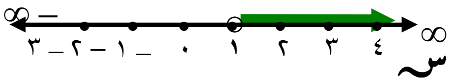
(٣) س = { أ : أ ∈ ح ، أ ≤ ١ }

=] −∞ ، ١]



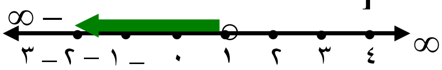
ويلاحظ أن : ١ ∈ س

(٢) س = { أ : أ ∈ ح ، أ > ١ } =] ١ ، ∞ [



ويلاحظ أن : ١ ∉ س

(٤) س = { أ : أ ∈ ح ، أ < ١ } =] −∞ ، ١ [



ويلاحظ أن : ١ ∉ س

تدريب (١) : عبر عن المجموعات الآتية على صورة فترة و مثلها على خط الأعداد :

١ – { أ : أ ∈ ح ، −٥ ≤ أ < ٤ }
٢ – { أ : أ ∈ ح ، أ < ١ }
٣ – { أ : أ ∈ ح ، ٠ < أ < ٣ }
٤ – { أ : أ ∈ ح ، أ ≥ −٦ }
٥ – مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة
٦ – مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة
٧ – مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة
٨ – مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
٩ – مجموعة الأعداد الحقيقية

تدريب (٢) : عبر عن الفترات الآتية رمزياً بطريقة الصف المميزة و مثلها على خط الأعداد :

١ – [١ ، ٤]
٢ –] −٢ ، ٣]
٣ – [٤ ، ∞ [
٤ –] −∞ ، −١ [

تدريب (٣) : أكمل بإستخدام الرمز المناسب من الرموز ∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄ :

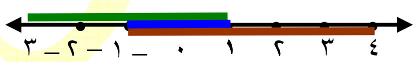
١ – √٣ .... [١ ، ٤]
٢ – −٥ ....] −٢ ، ٣]
٣ – { ١ ، ٤ } .... [٤ ، ∞ [
٤ – [١ ، ٣] ....] ٣ ، ∞ [

العمليات على الفتـرات

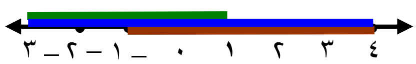
حيث أن الفترات هى مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية فإنه يمكن إجراء عمليات التقاطع و الإتحاد و الفرق والمكملة عليها ويمكن الإستعانة بخط الأعداد ‥ كما يلى:

إذا كانت : س = [−١ ، ٤] ؛ ص = [−٣ ، ١] فإن :

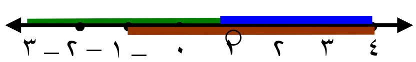
س ∩ ص = [−١ ، ١]



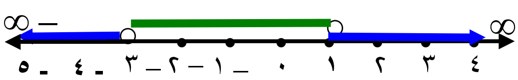
س ∪ ص = [−٣ ، ٤]



س − ص =] ١ ، ٤]



ص′ =] −∞ ، −٣ [∪] ١ ، ∞ [



تدريب :

إذا كانت : س = [-∞ ، ٣] ، ص = [-٢ ، ٤] أوجد مستعينا بخط الأعداد :

س ∩ ص ، س ∪ ص ، س – ص ، ص – س

تمارين

١ ـ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) ح = ... ( ]-∞ ، ٠[ا؛]-∞ ، ٠] ا؛]-∞ ، ∞[ا؛]٠ ، ∞[ )

(٢) ح+ = ... ( ]-∞ ، ٠[ا؛]-∞ ، ٠] ا؛ [٠ ، ∞[ا؛]٠ ، ∞[ )

(٣) ح- = ... ( ]-∞ ، ٠[ا؛]-∞ ، ٠] ا؛ [٠ ، ∞[ا؛]٠ ، ∞[ )

(٤) مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = ...

( ]-∞ ، ٠[ا؛]-∞ ، ٠] ا؛ [٠ ، ∞[ا؛]٠ ، ∞[ )

(٥) مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = ...

( ]-∞ ، ٠[ا؛]-∞ ، ٠] ا؛ [٠ ، ∞[ا؛]٠ ، ∞[ )

(٦) √٥ ∈ .... ( ]-١ ، ٠[ا؛]-∞ ، ٠[ا؛]٢ ، ٣[ا؛]٠ ، ١[ )

(٧) [٣ ، ٥] – {٣} = ... ( ]٣ ، ٥[ا؛]٣ ، ٥] ا؛ [٣ ، ٥[ا؛ [٣ ، ٥])

(٨)]٣ ، ٥] ∪ {٣} = ... ( ]٣ ، ٥[ا؛]٣ ، ٥] ا؛ [٣ ، ٥[ا؛ [٣ ، ٥])

(٩)]٣ ، ٥] ∩ [٣ ، ٥[= .... (∅ ا؛ [٣ ، ٥] ا؛]٣ ، ٥[ا؛ {٣ ، ٥})

(١٠) [١ ، ٥] ∩]٣ ، ٦] = ... ([١ ، ٥] ا؛]٣ ، ٥] ا؛ [١ ، ٣[ا؛ [١ ، ٦])

(١١) [١ ، ٥] ∪]٣ ، ٦] = ... ([١ ، ٥] ا؛ [٣ ، ٦] ا؛ [١ ، ٣[ا؛ [١ ، ٦])

(١٢) إذا كان : س° قياس أحد زوايا مثلث فإن : س ∈ ....

([٠ ، ١٨٠°] ا؛]٠ ، ١٨٠°[ا؛ [٠ ، ١٨٠°[ا؛]٠ ، ١٨٠°])

(١٣) إذا كانت ح هى المجموعة الشاملة فإن : ( ]٣ ، ∞[ )′ = ...

( ]-∞ ، ٣[ا؛]-∞ ، ٣] ا؛]-∞ ، ٢] ا؛]-∞ ، ٤])

(١٤) الشكل  **يمثل الفترة = ...**

( ]-٣ ، ٥[ا؛]-٣ ، ٥] ا؛ [-٣ ، ٥] ا؛ [-٣ ، ٥[ )

٢ ـ أوجد كلاً مما يأتى على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد :

(١) [٤ ، ٨] ∩]-٣ ، ٥]

(٢) [-٢ ، ٥[∪]٤ ، ٦]

(٣) [٢ ، ٦] –]-١ ، ٣[

(٤) [٢ ، ٤] –]٢ ، ٤[

(٥)]-∞ ، ١] ∪ [٣ ، ∞[

(٦) [٢ ، ∞[– [٤ ، ∞[

٣ ـ إذا كان : س ∩ ص = [٣ ، ٦] ، س ∪ ص = [٢ ، ٦] ، س ⊂ ص

فأوجد : س ، ص ، س – ص ، ص – س

٤ ـ إذا كان : س ∩ ص = [٢ ، ٤] ، س ∪ ص = [١ ، ٦] ، س – ص =]٤ ، ٦] **فأوجد :** س ، ص

أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

العمليات على الأعداد الحقيقية

عملية الجمع

نعلم أن : ٣ س + ٥ س = (٣ + ٥) س

= ٨ س

وبالتالى : ٣ $\sqrt{٢}$ + ٥ $\sqrt{٢}$ = ٨ $\sqrt{٢}$

عملية الضرب

نعلم أن : ٣ س × ٥ س = (٣ × ٥)(س × س)

= ١٥ س^{٢}

وبالتالى : ٣ $\sqrt{٢}$ × ٥ $\sqrt{٢}$ = ١٥ × ٢ = ٣٠

الخـــــــــــــواص

(١) الإنغـــــــلاق

الجمع:

إذا كان : ﺃ ، ب ∋ ح فإن : (ﺃ ، ب) ∋ ح

فمثلاً : كل من ٣ + $\sqrt{٢}$ ، ١ + $\sqrt[٣]{٦}$

عدد حقيقى

أى أن : ح مغلقة تحت عملية الجمع

الضرب:

إذا كان : ﺃ ، ب ∋ ح فإن : (ﺃ × ب) ∋ ح

فمثلاً : كل من ٣ × $\sqrt{٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

، ٥ × $\sqrt[٣]{٦}$ = ٥ $\sqrt[٣]{٦}$ عدد حقيقى

أى أن : ح مغلقة تحت عملية الضرب

(٢) الإبـــــــدال

الجمع:

إذا كان : ﺃ ، ب ∋ ح فإن : ﺃ + ب = ب + ﺃ

فمثلاً : ٣ + $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٢}$ + ٣

أى أن : ح إبدالية تحت عملية الجمع

الضرب:

إذا كان : ﺃ ، ب ∋ ح فإن : ﺃ × ب = ب × ﺃ

فمثلاً : ٣ × $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٢}$ × ٣ = ٣ $\sqrt{٢}$

أى أن : ح إبدالية تحت عملية الضرب

(٣) الدمـــــــج

الجمع:

إذا كان : ﺃ ، ب ، حـ ∋ ح فإن :

(ﺃ + ب) + حـ = ﺃ + (ب + حـ)

= ﺃ + ب + حـ

أى أن : ح دامجة تحت عملية الجمع

الضرب:

إذا كان : ﺃ ، ب ، حـ ∋ ح فإن :

(ﺃ × ب) × حـ = ﺃ × (ب × حـ)

= ﺃ × ب × حـ

أى أن : ح دامجة تحت عملية الضرب

(٤) العنصر المحايد

الجمع:

لكل ﺃ ∋ ح فإن : ﺃ + ٠ = ٠ + ﺃ = ﺃ

أى أن : الصفر هو المحايد الجمعى فى ح

الضرب:

لكل ﺃ ∋ ح فإن : ﺃ × ١ = ١ × ﺃ = ﺃ

أى أن : الواحد هو المحايد الضربى فى ح

(٥) المعكوس " النظير "

الجمع:

لكل ﺃ ∋ ح يوجد (– ﺃ) ∋ ح

حيث : ﺃ + (– ﺃ) = صفر

فمثلاً : $\sqrt{٢}$ ∋ ح معكوسه الجمعى (– $\sqrt{٢}$)

حيث : $\sqrt{٢}$ + (– $\sqrt{٢}$) = ٠

الضرب:

لكل ﺃ ∋ ح يوجد $\frac{١}{ﺃ}$ ∋ ح

حيث : ﺃ × $\frac{١}{ﺃ}$ = ١

فمثلاً : $\sqrt{٢}$ ∋ ح معكوسه الضربى

حيث : $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١

عملية الطرح

لكل ﺃ ، ب ∋ ح يكون :

ﺃ – ب = ﺃ + (– ب)

= جمع ﺃ مع المعكوس الجمعى للعدد ب

تحقق من أن :

عملية الطرح إبدالية أم لا

عملية الطرح دامجة أم لا

عملية القسمة

لكل ﺃ ، ب ∋ ح يكون :

ﺃ ÷ ب = ﺃ × $\frac{١}{ب}$ حيث : ب ≠ صفر

= ضرب ﺃ فى المعكوس الضربى للعدد ب

تحقق من أن :

عملية القسمة إبدالية أم لا

عملية القسمة دامجة أم لا

توزيع الضرب على الجمع : لكل أ ، ب ، جـ $\in$ ح يكون

$$\text{أ} \times (\text{ب} + \text{جـ}) = (\text{أ} \times \text{ب}) + (\text{أ} \times \text{جـ}) = \text{أ ب} + \text{أ جـ}$$

$$(\text{أ} + \text{ب}) \times \text{جـ} = (\text{أ} \times \text{جـ}) + (\text{ب} \times \text{جـ}) = \text{أ جـ} + \text{ب جـ}$$

فمثلاً :

$$3\sqrt{5}\,(4 + \sqrt{5}) = 3\sqrt{5} \times 4 + 3\sqrt{5} \times \sqrt{5}$$

$$= 3 \times 4 \times \sqrt{5} + 3 \times 5 = 12\sqrt{5} + 15$$

تذكر ما يأتى :

** عدد موجب × عدد موجب = عدد موجب

عدد موجب × عدد سالب = عدد سالب

عدد سالب × عدد سالب = عدد موجب

** إذا كان : أ ، ب $\in$ ح فإن :

(١) $-(-\text{أ}) = \text{أ}$ (٢) $\text{ب}\,(-\text{أ}) = -\text{أ ب}$

(٣) $(-\text{أ})(-\text{ب}) = \text{أ ب}$ (٤) $-(\text{ب} - \text{أ}) = -\text{ب} + \text{أ}$

تدريبات :

أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة

(١) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} =$

(٢) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2})$

$=$

(٣) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 =$

(٤) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})]^2$

$=$

تمارين

١ – أكمل ما يأتى :

(١) $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ...$

(٢) $٣\sqrt{٣} + \sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣} = ...$

(٣) $\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٢} - \sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣} = ...$

(٤) $٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٣} = ...$

(٥) $٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} = ...$

(٦) $٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} = ...$

(٧) $\sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٣} - ٥ = ...$

(٨) المعكوس الجمعى للعدد $(١ - \sqrt{٢}) = ...$

(٩) المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt[٣]{٥} = ...$

(١٠) المعكوس الضربى للعدد $\frac{١}{\sqrt{٢}} = ...$

٢ – أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة :

(١) $\sqrt{٥} \,/\, (\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$

(٢) $\sqrt{٣}\,(٢\sqrt{٣} + ٤)$

(٣) $٢\sqrt{٧}\,(٣\sqrt{٧} + ١)$

(٤) $(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$

(٥) $(\sqrt{٣} - ٢)(\sqrt{٣} + ٣)$

(٦) $(\sqrt{٣} - ٢)^{٢}$

(٧) $\left((\sqrt{٥} - ٢)^{٢}\right)\left((\sqrt{٥} + ٢)^{٢}\right)$

(٨) $(٣ - ٢\sqrt{٢})^{٣}$

(٩) $(٢ - \sqrt{٥})^{٢} - ٧$

(١٠) $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٤}(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٤}$

أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

العمليات على الجـــذور

التربيعية

(١) إذا كان س ، ص عددين حقيقيين غير سالبين فإن:

$$\sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س ص}}$$

فمثلا : $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$

(٢) $\dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} = \sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}}$ حيث ص $\neq$ صفر

فمثلا : $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

(٣) $\sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}} = \dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} \times \dfrac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{ص}}} = \dfrac{\sqrt{\text{س ص}}}{\text{ص}}$

حيث ص $\neq$ صفر

التكعيبية

(١) إذا كان س ، ص عددين حقيقيين فإن:

$$\sqrt[3]{\text{س}} \times \sqrt[3]{\text{ص}} = \sqrt[3]{\text{س ص}}$$

فمثلا : $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

(٢) $\dfrac{\sqrt[3]{\text{س}}}{\sqrt[3]{\text{ص}}} = \sqrt[3]{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}}$ حيث ص $\neq$ صفر

فمثلا : $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(٣) $\sqrt[3]{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}} = \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}}}{\sqrt[3]{\text{ص}}} \times \dfrac{\sqrt[3]{\text{ص}^2}}{\sqrt[3]{\text{ص}^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{\text{س ص}^2}}{\text{ص}}$

حيث ص $\neq$ صفر

المقام يجب أن يكون عدداً صحيحاً

التربيعية

فمثلا : $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

(٤) $\text{س} \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س}^2 \text{ص}}$

فمثلا : $3\sqrt{27} = \sqrt{27 \times 3} = \sqrt{81} = 9$

وبالعكس لوضع العدد على الصورة : $\text{س} \sqrt{\text{ص}}$
حيث س ، ص عددان صحيحان ، ص أصغر قيمة ممكنة لاحظ الأمثلة الآتية :

* $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

* $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

التكعيبية

فمثلا : $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{4}$

(٤) $\text{س} \sqrt[3]{\text{ص}} = \sqrt[3]{\text{س}^3 \text{ص}}$

فمثلا : $3\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

وبالعكس لوضع العدد على الصورة : $\text{س} \sqrt[3]{\text{ص}}$
حيث س ، ص عددان صحيحان ، ص أصغر قيمة موجبة ممكنة لاحظ الأمثلة الآتية :

* $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 27} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

* $\sqrt[3]{-40} = \sqrt[3]{-8 \times 5} = \sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{5} = -2\sqrt[3]{5}$

العددان المترافقان

إذا كان : س ، ص عددين نسبيين موجبين فإن :

كلاً من العددين: $(\sqrt{س} + \sqrt{ص})$ ، $(\sqrt{س} - \sqrt{ص})$ هو مرافق للآخر

مجموعهما = $(\sqrt{س} + \sqrt{ص}) + (\sqrt{س} - \sqrt{ص}) = ٢ \sqrt{س}$ " ضعف الحد الأول "

حاصل ضربهما = $(\sqrt{س} + \sqrt{ص}) \times (\sqrt{س} - \sqrt{ص}) = (\sqrt{س})^{٢} - (\sqrt{ص})^{٢}$

$= س - ص =$ مربع الحد الأول – مربع الحد الثانى " عدد نسبى "

فمثلا : العدد $(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})$ مرافقه العدد $(\sqrt{٧} - \sqrt{٢})$

مجموعهما = $(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}) + (\sqrt{٧} - \sqrt{٣}) = ٢ \sqrt{٧}$

حاصل ضربهما = $(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}) \times (\sqrt{٧} - \sqrt{٣}) = (\sqrt{٧})^{٢} - (\sqrt{٣})^{٢} = ٧ - ٣ = ٤$

ملحوظة :

العدد الحقيقى الذى مقامه $(\sqrt{س} \pm \sqrt{ص})$ يجب وضعه فى أبسط صورة و ذلك بضرب البسط و المقام فى مرافق المقام

مثال

$$\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{(\sqrt{٧})^{٢} - (\sqrt{٣})^{٢}}$$

$$= \frac{٤ (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{٧ - ٣} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$$

ملاحظات

نعلم أن : $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

؛ $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

وبالتالى : $س^{٢} + ص^{٢} = (س + ص)^{٢} - ٢ س ص$

أ؛ $= (س - ص)^{٢} + ٢ س ص$

؛ $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = (س + ص)^{٢} - س ص$

؛ $س^{٢} - س ص + ص^{٢} = (س - ص)^{٢} + س ص$

؛ $س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص) (س + ص)$

تمـــــارين

١ ـ أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) $\sqrt{٢٨} = ...$ ($٧\sqrt{٢}$ ؛ $٢\sqrt{٧}$ ؛ $٤\sqrt{٧}$ ؛ $٧\sqrt{٤}$)

(٢) $\frac{١}{٣}\sqrt{٧٢} = ...$ ($٢\sqrt{٢}$ ؛ $٣\sqrt{٣}$ ؛ $٦\sqrt{٢}$ ؛ $٢\sqrt{٦}$)

(٣) $\sqrt[٣]{١٢٨} = ...$ ($٢\sqrt[٣]{٤}$ ؛ $٤\sqrt[٣]{٣}$ ؛ $٤\sqrt[٣]{٢}$ ؛ $٨\sqrt[٣]{٤}$)

(٤) $\sqrt[٣]{-٨١} = ...$ ($-٣\sqrt[٣]{٣}$ ؛ $٣\sqrt[٣]{٣}$ ؛ $٣\sqrt[٣]{٢}$ ؛ $٨\sqrt[٣]{٤}$)

(٥) مجموع العدد ($\sqrt{٦} + \sqrt{٥}$) ومرافقه = ...
($٢\sqrt{٥}$ ؛ $٣\sqrt{٥}$ ؛ $٢\sqrt{٦}$ ؛ $٣\sqrt{٦}$)

(٦) حاصل ضرب العدد ($\sqrt{٧} - ٣$) ومرافقه = ...
(-٢ ؛ ٢ ؛ ٤ ؛ -٤)

(٧) المعكوس الضربى للعدد ($\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$) هو ....
($\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ ؛ $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ؛ $\sqrt{٢} + \sqrt{٣}$ ؛ $٢\sqrt{٣}$)

(٨) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ هو .... ($-\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ ؛ $٦\sqrt{٢}$ ؛ $٣\sqrt{٢}$ ؛ $-٣\sqrt{٢}$)

٢ ـ أكتب كلاً مما يأتى بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً :

$$\frac{١٠}{\sqrt{٢}} \text{ ، } \frac{٣}{\sqrt[٣]{٣}} \text{ ؛ } \frac{٦}{٣\sqrt{٢}} \text{ ، } \frac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}} \text{ ؛ } \frac{٨}{٣-\sqrt{٥}}$$

٣ ـ أختصر لأبسط صورة :

(١) $\sqrt{٥٠} - \sqrt{٨}$

(٢) $٣\sqrt{٤٨} - \sqrt{٧٥} - \sqrt{٢} \times \sqrt{٦}$

(٣) $١٣\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٨} + ٤\sqrt{\frac{١}{٢}}$

(٤) $\sqrt{١٨} - \frac{١٢}{\sqrt{٦}} + \sqrt{٢}\,(٢\sqrt{٣} - ٣)$

(٥) $٥\sqrt[٣]{٢٤} - ٣\sqrt[٣]{١٩٢} - ٢\sqrt[٣]{-٣٧٥}$

(٦) $\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt{٢٨} + \sqrt{٦٣} + \sqrt[٣]{-١٦}$

٤ ـ إذا كان : $س = ٣ - \sqrt{٢}$ ، ص مرافق س فاوجد قيمة : $س^{٢} - ٢\,س\,ص + ص^{٢}$

٥ ـ إذا كان : $س = \sqrt[٣]{٣} + ١$ ، $ص = \sqrt[٣]{٣} - ١$ فاوجد قيمة : $(س + ص)^{٣}$

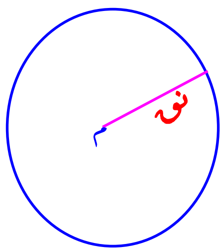
٦ ـ إذا كان : $س = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ، ص مرافق س فأوجد قيمة : $س^{٤}\,ص^{٤}$

٧ ـ إذا كان : $س = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ أوجد قيمة : $س + \frac{١}{س}$

٨ ـ إذا كان : $س = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ، $س\,ص = ٢$ أوجد قيمة : $س + ص$ ، $س^{٢} + ٢\,س\,ص + ص^{٢}$

تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

الدائرة



محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق^{٢} وحدة مربعة

حيث نق طول نصف قطر الدائرة ، π (النسبة التقريبية)

مثال : دائرة مساحتها ٦١٦ سم^{٢} أوجد محيطها حيث $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

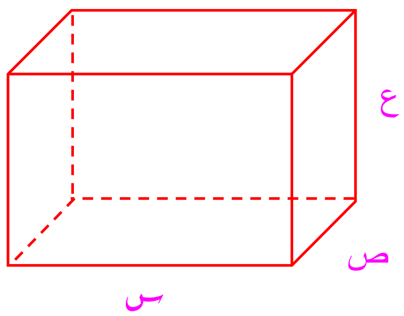
الحل

∵ مساحة الدائرة = π نق^{٢} ∴ ٦١٦ = $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢}

∴ نق^{٢} = $\frac{٦١٦ \times ٧}{٢٢}$ = ١٩٦ ∴ نق = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم

متوازى المستطيلات



هو مجسم جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل

وكل وجهين متقابلين متطابقان

إذا كانت أطوال أحرفه س ، ص ، ع فإن :

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الإرتفاع

= ٢(س + ص) × ع وحدة مربعة

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ٢ (س ص + ص ع + ع س) وحدة مربعة

الحجم = مساحة القاعدة × الإرتفاع = س × ص × ع وحدة مكعبة

مثال : متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه ٧٢٠ سم^{٣} ، طول إرتفاعه ٥ سم

أوجد مساحته الجانبية

الحل

∵ حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الإرتفاع

∴ ٧٢٠ = مساحة القاعدة × ٥ ∴ مساحة القاعدة = ١٤٤ سم^{٢}

، ∵ القاعدة مربعة ∴ طول ضلع القاعدة = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

∴ المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الإرتفاع = ٤ × ١٢ × ٥ = ٢٤٠ سم

المكعب

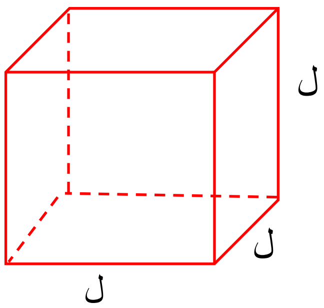
هو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية فى الطول

إذا كان طول حرفه = ل وحدة طول

مساحة كل وجه = ل^{٢}

مساحته الجانبية = ٤ ل^{٢} ، مساحته الكلية = ٦ ل^{٢}

حجمه = ل^{٣}



مثال : أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه = ٢١٦ سم^{٣}

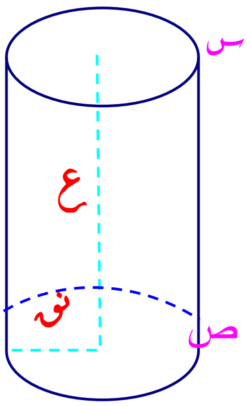
الحل

∵ حجم المكعب = ل^{٣} ∴ ٢١٦ = ل^{٣} ∴ ل = $\sqrt[٣]{٢١٦}$ = ٦ سم

∴ مساحته الكلية = ٦ ل^{٢} = ٦ × ٦^{٢} = ٢١٦ سم^{٢}

الإسطوانة الدائرية القائمة :

هى مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما سطح دائرة ، طول القطعة المستقيمة الواصلة بين المركزين هو إرتفاع الإسطوانة ، أما السطح الجانبى للإسطوانة فهو سطح منحنى إذا قطع عند $\overline{\text{س ص}}$ وبسط ينتج مستطيل



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الإرتفاع = ٢ π نق ع وحدة مربعة

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

المساحة الكلية = ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة

الحجم = مساحة القاعدة × الإرتفاع = π نق^{٢} ع وحدة مكعبة

مثال : أوجد المساحة الجانبية لإسطوانة دائرية قائمة حجمها = ٧٧٠ سم^{٣} ، طول إرتفاعها = ٥ سم

الحل

∵ حجم الإسطوانة = π نق^{٢} ع ∴ ٧٧٠ = $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} × ٥

∴ نق^{٢} = $\frac{٧٧٠ \times ٧}{٢٢ \times ٥}$ = ٤٩ ∴ نق = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ سم

∴ المساحة الجانبية للإسطوانة = ٢ π نق ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٥ = ٢٢٠ سم^{٢}

الكرة :

هى مجسم سطحه منحنى جميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية (نق) من نقطة ثابتة داخله (مركز الكرة)

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} وحدة مكعبة

مثال : أحسب طول قطر الكرة التى حجمها ٣٦ π سم^{٣}

أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

الحل

∵ حجم الكرة $= \frac{4}{3}\pi$ نق^3

∴ $36\pi = \frac{4}{3}\pi$ نق^3

∴ نق$^3 = 27$

∴ نق $= 3$ سم

∴ قطر الكرة $= 6$ سم

قواعد حساب محيط ومساحة بعض الأشكال الهندسية :

الشكل	المحيـــــــــط	المســــــــاحة
الدائرة	2π نق	π نق^2
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الإرتفاع
متوازى الأضلاع	مجموع طولى ضلعين متجاورين × ٢	طول القاعدة × الإرتفاع المناظر لها
المستطيل	(الطول + العرض) × ٢	الطول × العرض
المربع	طول الضلع × ٤	مربع طول الضلع أو $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره
المعين	طول الضلع × ٤	طول الضلع × الإرتفاع أو $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طول قطريه
شبه المنحرف	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{1}{2}$ مجموع طولى القاعدتين المتوازيتين × الإرتفاع أ، طول القاعدة المتوسطة × الإرتفاع

قواعد حساب مساحة وحجم بعض المجسمات :

المجســـــم	رموز الأبعاد	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب	طول حرفه = ل	٤ ل^2	٦ ل^2	ل^3
متوازى المستطيلات	أبعاد القاعدة هما س ، ص ، الإرتفاع = ع	٢(س + ص) × ع	٢(س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع
المنشور القائم	—	محيط القاعدة × الإرتفاع	المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة	مساحة القاعدة × الإرتفاع
الأسطوانة الدائرية القائمة	طول نصف قطر القاعدة = نق الإرتفاع = ع	2π نق ع	2π نق (ع + نق)	π نق^2 ع
الكــرة	طول نصف القطر = نق	—	4π نق^2	$\frac{4}{3}\pi$ نق^3

تمارين

١ – أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) دائرة محيطها ٤٤ سم ، طول قطرها = ٠٠٠٠٠ سم (١٤ ؛ ٢٢ ؛ ٤٤ ؛ ١٥٤)

(٢) مكعب مجموع أطوال أحرفه ٢٤ سم ، حجمه = ٠٠٠٠٠ سم^3 (٢٤ ؛ ١٢ ؛ ٨ ؛ ٦)

(٣) كرة حجمها $\frac{9}{16}\pi$ سم^3 ، طول قطرها = ٠٠٠٠٠ سم (٣ ؛ $\frac{9}{16}$ ؛ $\frac{3}{2}$ ؛ $\frac{3}{4}$)

(٤) إذا كانت : المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة = ٢ π نق فإن : ع = ٠٠٠٠٠

(١ ؛ ٢ ؛ π ؛ نق)

(٥) المساحة الكلية لمكعب ٥٤ سم^2 ، حجمه = ٠٠٠٠٠ سم^3 (٣ ؛ ٢٧ ؛ ٦ ؛ ٩)

(٦) إذا كان منشور قائم مساحة قاعدته ٦ سم ، إرتفاعه ١٠ سم فإن حجمه = ٠٠٠٠٠ سم^3

(١٦ ؛ ٤ ؛ ٦٠ ؛ ١٠٦)

(٧) المساحة الكلية لمتوازى مستطيلات أبعاده : ٤ سم ، ٥ سم ، ٦ سم = ٠٠٠٠٠ سم^2

(٦٥٤ ؛ ١٢٠٠ ؛ ١٥ ؛ ١٤٨)

٢ – أجب عما يلى :

(١) دائرة مساحتها ٦١٦ سم^2 أوجد محيطها

(٢) إذا كانت مساحة ٦ دوائر متساوية = ٥٤ π سم^2 أوجد محيط الدائرة الواحدة

(٣) إسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها = ٤٤ سم ، حجمها = ٣٨٥٠ سم^3 أوجد إرتفاعها

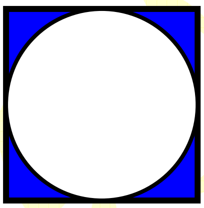
(٤) متوازى مستطيلات بعدا قاعدته ٥ سم ، ٦ سم ، إرتفاعه ١٠ سم أوجد :
مساحته الجانبية ، مساحته الكلية ، حجمه

(٥) منشور رباعى قائم إرتفاعه = ٢٠ سم وقاعدته على شكل معين طولا قطريه ١٢ سم ، ١٦ سم
أوجد حجمه

(٦) منشور ثلاثى إرتفاعه = ١٠ سم وقاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية فيه طولا ضلعى القائمة ٥ سم
١٢ سم أوجد حجمه

(٧) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل و إرتفاعه ٣ سم فإذا كان مجموع أطوال أحرفه ٥٢ سم
أوجد حجمه

(٨) كرة مساحة سطحها ٥٥٤٤ سم^2 أوجد حجمها



(٩) فى الشكل المقابل : مربع طول ضلعه = طول قطر الدائرة
فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ١٤ سم أوجد
مساحة المنطقة المظللة المحصورة بينهما

(١٠) متوازى مستطيلات حجمه = ٥٧٦ سم^3 والنسبة بين أبعاده الثلاثة كنسبة ٣ : ٤ : ٦ أوجد
مساحته الكلية

(١١) وضعت كرة داخل مكعب طول حرفه ١٤ سم فمست أوجهه الستة أوجد النسبة بين
حجم الكرة و حجم المكعب

(١٢) كرة من المعدن طول نصف قطرها ٣ سم صهرت وحولت إلى إسطوانة طول نصف قطرها
٣ سم أحسب إرتفاع الإسطوانة

(١٣) كرة معدنية جوفاء طول نصف قطرها الداخلى ٢.١ سم ، وطول نصف قطرها الخارجى
٣.٥ سم أوجد كتلتها لأقرب جرام علماً بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جم

حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

نعلم أن :

الجملة الرياضية : ٣ س + ١ = ٧ تسمى معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد هو س

* **المعادلة هى : جملة رياضية تحتوى على متغير أو أكثر وتحتوى علاقة التساوى**
* **درجة المعادلة هى : أعلى درجة حد جبرى تحتوى عليه المعادلة**
* **حل المعادلة هو : إيجاد المجهول أو المجاهيل التى تحقق تساوى طرفى المعادلة**
* **مجموعة الحل هى : المجموعة التى عناصرها تحقق المعادلة**

خواص علاقة التساوى :

إذا كان س ، ص ، ع أعداداً حقيقية فإن :

الإضافة : إذا كان س = ص فإن : س + ع = ص + ع

فمثلا : إذا كان س ــ ١ = ٣ فإن س = ٤ (بإضافة ١ للطرفين)

الضرب : إذا كان س = ص فإن : س × ع = ص × ع

فمثلا : إذا كان $\frac{١}{٣}$ س = ٤ فإن س = ١٢ (بضرب الطرفين × ٣)

الحذف : إذا كان س + ص = ص + ع فإن س = ع

فمثلا : إذا كان س + ٣ = ٧ فإن س = ٤ (بطرح ٣ من الطرفين)

القسمة : إذا كان س × ع = ص × ع فإن س = ص ، ع ≠ صفر

فمثلا : إذا كان ٥ س = ١٥ فإن س = ٣ (بقسمة الطرفين على ٥)

مثال : حل المعادلة ٥ س + ١ = ١١ فى ح و تحقق من الناتج

الحل

∵ ٥ س + ١ = ١١ بإضافة (ــ ١) للطرفين

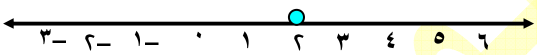
∴ ٥ س = ١٠ بالضرب × $\frac{١}{٥}$

∴ س = ٢ ∴ مجموعة الحل = { ٢ }

التحقيق : بالتعويض فى المعادلة الأصلية عن س = ٢ ينتج :

٥ × ٢ + ١ = ١١ = الطرف الأيسر

و يمثل الحل على خط الأعداد كما بالشكل المقابل



تدريب : حل المعادلة $\sqrt{٣}$ س + ٣ = ٦ حيث س ∋ ح و مثل الحل على خط الأعداد

الحل

∵ $\sqrt{٣}$ س + ٣ = ٦ ∴ $\sqrt{٣}$ س =

∴ س =

∴ مجموعة الحل =

حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

نعلم أن :

الجملة الرياضية : ٣ س + ١ > ٧ ، و الجملة الرياضية : ٢ س + ١ < ٧

تسمى متباينة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد هو س

المتباينة :

هى الجملة الرياضية التى تحتوى على متغير (أو أكثر) وتتضمن علاقة :

< أو > أو ≤ أو ≥

مجموعة حل المتباينة :

هى مجموعة العناصر التى تنتمى إلى مجموعة التعويض و التى تحقق كل منها المتباينة
و تكتب مجموعة الحل فى ح على صورة فترة

خواص علاقة التباين : إذا كان س ، ص ، ع أعداداً حقيقية :

** إذا كان س > ع فإن : س + ص > ص + ع

إضافة (طرح) عدد حقيقى إلى طرفى المتباينة لا يؤثر على علاقة التباين

فمثلا : إذا كان س > ٣ فإن : س > ٧ (بإضافة ٤ للطرفين)

؛ إذا كان س > ٣ فإن : س > - ١ (بطرح ٤ من الطرفين)

** إذا كان س > ع ؛ ص > صفر فإن : س ص > ص ع

ضرب (قسمة) طرفى المتباينة فى عدد حقيقى موجب لا يؤثر على علاقة التباين

فمثلا : إذا كان س > ٥ فإن : ٣ س > ١٥ (بضرب الطرفين فى ٣)

؛ إذا كان: ٣ س > ٩ فإن : س > ٣ (بقسمة الطرفين على ٣)

** إذا كان س > ع ؛ ص < صفر فإن : س ص < ص ع

ضرب (قسمة) طرفى المتباينة فى عدد حقيقى سالب يغير إتجاه علاقة التباين

فمثلا : إذا كان : س > ٥ فإن ـ ٣ س < ـ ١٥ (بضرب الطرفين فى ـ ٣)

؛ إذا كان : ٣ س > ٩ فإن ـ س < ـ ٣ (بقسمة الطرفين على ـ ٣)

مثال :

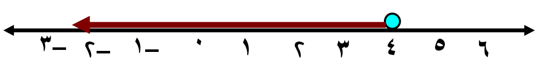
أوجد مجموعة حل المتباينة : س + ٣ ≤ ٧ فى ح
ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

الحل

∵ س + ٣ ≤ ٧ بإضافة ـ ٣ للطرفين

∴ س ≤ ٤

∴ مجموعة الحل =] ـ ∞ ، ٤]



و الشكل المقابل يوضح تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد

تدريب (١) :

أوجد مجموعة حل المتباينة : ٢ س – ٣ ≥ ١ فى ح

ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

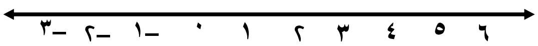
الحل

تدريب (٢) :

أوجد مجموعة حل المتباينة : ٨ – ٣ س > – ١ فى ح

ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

الحل



تدريب (٣) :

أوجد مجموعة حل المتباينة : ٣ > ٢ س + ١ ≥ ٧ فى ح

ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

الحل

تمارين

١ ـ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت : س + ٥ = ١١ فإن : ٣ س = ...

(٢) إذا كانت : ٣ س = ٦ فإن : س + ٦ = ...

(٣) إذا كانت : ٢ س ـ ١ = ٧ فإن : $\frac{١}{٢}$ س = ...

(٤) إذا كانت : س + ٢ س + ٣ س + ٤ س = ١٠ فإن : ٣ س = ...

(٥) إذا كانت : مجموعة حل المعادلة : س + ل = ٤ هى { ٣ } فإن : ل = ...

(٦) إذا كانت : مجموعة حل المعادلة : ٣ س + ٢ ل = ٥ هى { ١ } فإن : ل = ...

(٧) مجموعة حل المعادلة س + ... = ٧ فى ص هى { ـ ٢ }

(٨) إذا كان : ص ـ $\frac{١}{٤}$ ١ = $\frac{١}{٢}$ ٥ فإن : ص = ...

(٩) إذا كان : $\frac{س}{٤} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{س}{٢}$ = ...

(١١) مجموعة حل المتباينة : س < ٣ فى ح هى ....

(١٢) مجموعة حل المتباينة : س ≥ ١ فى ح هى ....

(١٣) مجموعة حل المتباينتين : ١ > س ، س ≥ ٥ معاً فى ح هى ....

(١٤) إذا كان : ﻫ > ب ، س = ـ ٣ فإن : ﻫ س .... ب س

(١٥) إذا كان : ـ س < ١ فإن : س ....

(١٦) إذا كان : ﻫ > ب ،فإن : ﻫ ـ ٣ .... ب ـ ٣

(١٧) إذا كان : س > ـ ٢ فإن : س + ٣ < ....

(١٨) إذا كان : ١ ـ س > ٥ فإن : ....

٢ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ح ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

(١) س + ١ = ٥ (٢) س ـ ٤ = ٣

(٣) ٣ س = ١٥ (٤) ٢ س + ٣ = ٥

(٥) ٣ س ـ ٢ = ١٣ (٦) ٤ س + ١٧ = ١

٣ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى ح ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

(١) س + ١ > ٥ (٢) ٣ س > ١٥

(٣) ٢ س + ٣ < ٥ (٤) ٤ ـ ٣ س ≥ ٧

(٥) ٣ س ـ ٢ ≤ ١٣ (٦) ٣ س + ١ < س ـ ٧

(٧) ١ > س + ٢ > ٥ (٨) ٢ ≥ س ـ ١ ≥ ٤

(٩) ـ ٢ > ٤ ـ ٣ س ≥ ٧ (١٠) ٢ > ٢ (س + ١) > ٦

٦ ـ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينتين الآتيتين معاً فى ح :

٢ س ـ ٣ ≥ ١ ، ٣ ـ ٢ س > ٧

٧ ـ إذا كان :] ٥ ، ١٠ [هى مجموعة حل المتباينة ﻫ > س ـ ٢ > ب أوجد قيمة ﻫ ، ب

الإحصـــــــاء

** جمع البيانات وتنظيمها

*** لدراسة ظاهرة ما نتبع الآتى :**

** نجمع البيانات من مصادرها
** تنظم البيانات وتعرض فى جداول تكرارية
** نستخدم أحدى الطرق الإحصائية لتحليل البيانات
** نفسر النتائج التى توصلنا إليها
** نقدم المقترحات لعلاج هذه الظاهرة

** أنواع البيانات وطرق جمعها

** بيانات إبتدائية : وهى البيانات المجمعة بإستخدام كشوف الملاحظة والإستبيانات
** بيانات ثانوية : وهى البيانات المجمعة من الإنترنت ، الكتب ، الوثائق ، النشرات الإحصائية
** بيانات تجريبية : وهى البيانات المجمعة بإستخدام التجارب لإختبار نظرية

** لتنظيم البيانات وعرضها فى جداول تكرارية نتبع الخطوات التالية :

** نوجد أكبر قيمة و أصغر قيمة لهذه البيانات
** نوجد المدى : حيث المدى = أكبر قيمة ــ أصغر قيمة
** نجزئ مجموعة البيانات إلى مجموعات جزئية متساوية المدى ولتكن ٦ مجموعات
** مدى المجموعة = مدى البيانات ÷ ٦
** تسجل البيانات فى جدول التفريغ المكون من ثلاثة أعمدة :
عمود المجموعات عمود العلامات عمود التكرار
** نحذف عمود العلامات فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات

مثال : البيان التالى الدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالب فى أحد الإختبارات :

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٩	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨	١٧

والمطلوب تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات

الحل

** أكبر قيمة لهذه البيانات = ١٩ ، اصغر قيمة = ٢
** المدى = ١٩ ــ ٢ = ١٧
** نجزئ مجموعة البيانات إلى مجموعات جزئية متساوية المدى ليكن ٦ مجموعات
** مدى المجموعة = ١٧ ÷ ٦ ≃ ٣
** تصبح المجموعات الجزئية كالآتى : ٢ ــ ، ٥ ــ ، ٨ ــ وهكذا
لاحظ : ٢ ــ تعنى أن مجموعة البيانات ≥ ٢ و > ٥
** تسجل البيانات فى الجدول التالى :

المجموعات	العلامات	التكرار
المجموعات	العلامات	التكرار
٢ –	////	٤
٥ –	~~////~~ /	٦
٨ –	~~////~~ //	٧
١١ –	~~////~~ ///	٨
١٤ –	///	٣
١٧ –	//	٢
المجموع		٣٠

يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات ويمكن كتابته رأسياً أو أفقياً والصورة الأفقية للجدول هى :

المجموعة	٢ –	٥ –	٨ –	١١ –	١٤ –	١٧ –	المجموع
التكرار	٤	٦	٧	٨	٣	٢٢	٣٠

تدريب :

كون جدول تكرارى ذى مجموعات للبيانات الآتية :

٣٥	٤٠	٢٠	٣٠	٣٧	٤٠	٣٣	٢٢	٣٨	٣٥
٣٦	٣٧	٣٩	٢٨	٣٢	٢٦	٢٩	٣٧	٢٣	٣٤
٢٥	٢٢٨	٣٥	٣٦	٢٩	٣٨	٤٠	٣٥	٣٧	٣١

تمارين

١ ـ أكمل ما يأتى :

(١) من أنواع البيانات .... ، .... ، ....

(٢) المدى لمجموعة من القيم = ...

(٣) جدول التفريغ يتكون من .... ، .... ، ....

(٤) الجدول التكرارى ذى المجموعات يتكون من .... ، ....

(٥) نحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات من جدول التفريغ بحذف عمود ....

(٦) إذا كانت المجموعات الجزئية لجدول تكرارى ذى مجموعات هى : ٣ ـ ، ٧ ـ ، ١١ ـ
فإن المجموعة الجزئية ٣ ـ تعنى ....

٢ ـ البيانات التالية تبين أوزان ٤٠ طفل بالكجم كون جدول تكرارى لهذه البيانات

٤٣	٣٣	٣١	١٥	٤٤	٢٤	٣٤	٣٩	٢٧	٣٨
٤٢	٢٥	٢٩	٢١	٢٩	٣٠	٣٣	٢٦	٣٣	٣٧
٤٠	٢٦	٣٢	٢١	٢٥	٣٠	٣٦	٣٢	٢٣	٣٦
٢٩	٣٥	٢٧	٣٤	٢٨	٢٢	٣١	١٩	٢٨	٣١

ثم أوجد عدد الأطفال الذين أوزانهم أكبر من ٣٠ كجم

٣ ـ البيانات التالية تبين درجات الحرارة المئوية فى ٢٠ يوماً متتالية من أيام السنة

١٧	١٠	٢٣	٢٨	١٢	٣٥	١٥	٣٦	٣٣	١٤
٣٢	٨	٣٣	٣٥	١٣	١٥	٢٧	٢٢	٣٥	١٦

كون جدول تكرارى لهذه البيانات

٤ ـ فى الجدول التكرارى الآتى أكمل الجدول :

المجموعات	١٠ ـ	....	....	٤٠ ـ	٥٠ ـ	المجموع
التكرار	٧	٨	١٢	....	٤	٤٠

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد
والجدول التكرارى المتجمع النازل
وتمثيلهما بيانياً

(١) الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و تمثيله بيانياً :

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد لبيانات الجدول الآتى ومثله بيانياً :

الحل

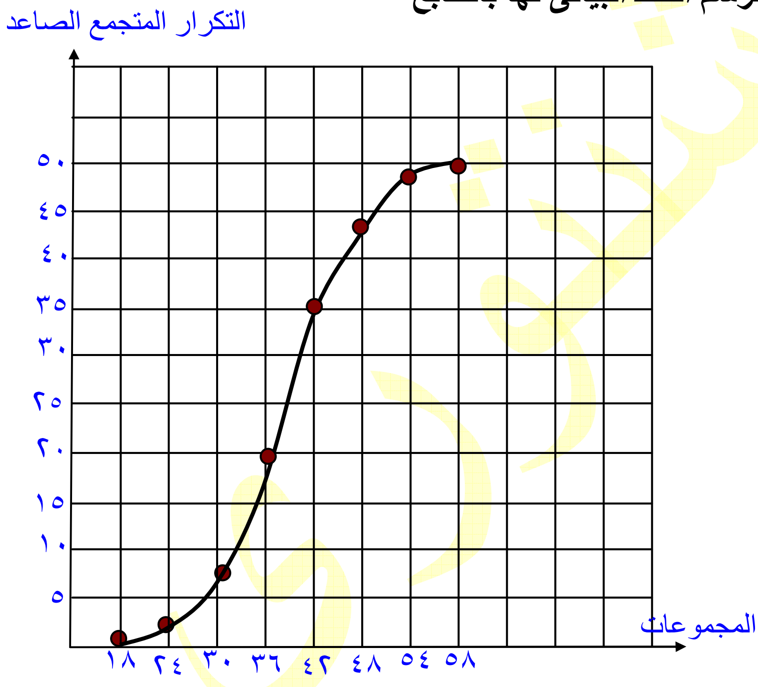
ا لمجموعات	١٨ –	٢٤ –	٣٠ –	٣٦ –	٤٢ –	٤٨ –	٥٤ –	المجموع
ا لتكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠

لتكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد :

نكون جدول من عمودين العمود الأول للحدود العليا للمجموعات ،
والعمود الثانى للتكرار المتجمع الصاعد و نبدأ بالتكرار صفر لماذا ؟
ثم نجمع التكرارات بالتتابع

وللتمثيل البيانى :

نخصص المحور الأفقى للمجموعات ، والمحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد
نختار مقياس رسم مناسب للتكرار المتجمع الصاعد بحيث يتسع المحور الرأسى للتكرار الكلى الصاعد عدد عناصر المجموعة
نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نرسم الخط البيانى لها بالتتابع



الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	أجمع ↓
أقل من ١٨	صفر	٢
أقل من ٢٤	٢	٤
أقل من ٣٠	٦	١٠
أقل من ٣٦	١٦	١٨
أقل من ٤٢	٣٤	٨
أقل من ٤٨	٤٢	٦
أقل من ٥٤	٤٨	٢
أقل من ٥٨	٥٠	

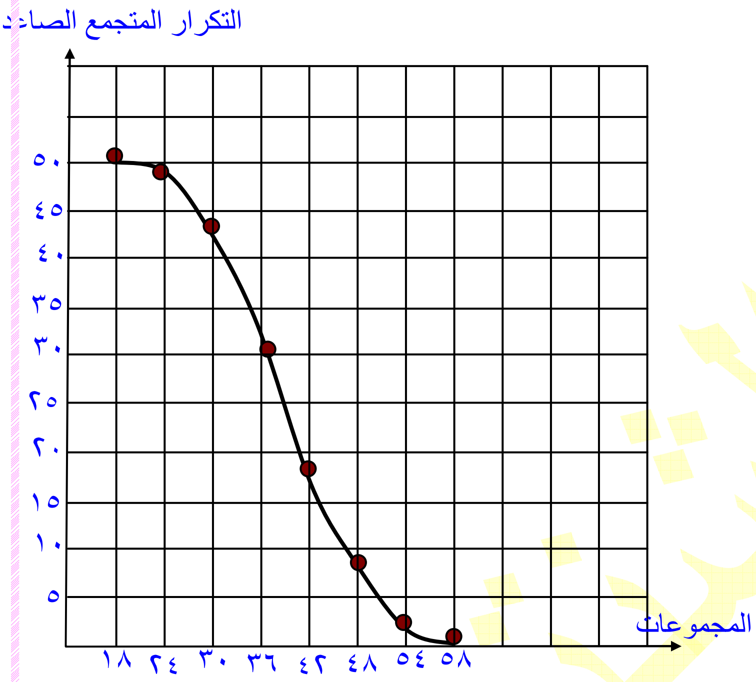
(٢) **الجدول التكرارى المتجمع النازل و تمثيله بيانياً :**

كون الجدول التكرارى المتجمع النازل لبيانات الجدول الآتى ومثله بيانياً :

الحل

لتكوين الجدول التكرارى المتجمع النازل :
نكون جدول من عمودين العمود الأول للحدود السفلى للمجموعات ،
والعمود الثانى للتكرار المتجمع النازل و نبدأ بمجموع التكرارات **لماذا ؟**
ثم نطرح التكرارات بالتتابع
أو نبدأ من آخر مجموعة بالتكرار صفر ونجمع التكرارات بالتتابع من أسفل لأعلى
وللتمثيل البيانى :
نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل	أطرح ↓
١٨ فأكثر	٥٠	٢
٢٤ فأكثر	٤٨	٤
٣٠ فأكثر	٤٤	١٠
٣٦ فأكثر	٣٤	١٨
٤٢ فأكثر	١٦	٨
٤٨ فأكثر	٨	٦
٥٤ فأكثر	٢	٢
٥٨ فأكثر	صفر	



تمارين

١ – ا لجدول الآتي يبين ا لتوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالباً في إحدى ا لمواد

مجموعات ا لدرجات	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	ا لمجموع
عدد ا لطلاب	٣	١٣	١٧	٢٣	٥	٦٠

أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لنازل

٢ – أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد للتوزيع ا لتكراري الآتي :

ا لمجموعات	٢ –	٤ –	٦ –	٨ –	١٠ –	١٢ –	ا لمجموع
ا لتكرار	٥	١٥	٣٠	٢٤	١٧	٩	١٠٠

٣ – ا لجدول الآتي يبين ا لتوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ طالب في إمتحان إحدى ا لمواد

المجموعات	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	ا لمجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

* أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد والنازل
* أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة ، الحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر
* النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة

٤ – ا لجدول الآتي يبين ا لتوزيع التكراري لأعمار ٥٠ عامل بأحد المصانع

المجموعات	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –	٤٥ –	٥٠ –	ا لمجموع
التكرار	٥	٨	٩	١٢	.....	٥	٢	٥٠

* أكمل الجدول
* أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد والنازل
* عدد العمال الذين أعمارهم ٣٥ سنة فأكثر
* عدد العمال الذين أعمارهم أقل من ٣٥ سنة

الوسط الحسابى

تعريف :

الوسط الحسابى هو القيمة التى لو أعطيت لكل مفردة " قيمة " من مفردات " قيم " المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية

الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\dfrac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

فمثلاً :

أوجد الوسط الحسابى للقيم : ٣ ، ٥ ، ١٧ ، ١٨ ، ٧ ، ١١ ، ٢

الوسط الحسابى = $\dfrac{٣ + ٥ + ١٧ + ١٨ + ٧ + ١١ + ٢}{٧} = \dfrac{٦٣}{٧} = ٩$

الوسط الحسابى لبيانات جدول تكرارى ذى مجموعات :

الخطوات : تتضح الخطوات من المثال الآتى :

أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –
التكرار	٢	٨	١٧	٢٣	٧	٣

**** نحدد مراكز المجموعات (م): م** = $\dfrac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى للمجموعة}}{٢}$

∴ مركز المجموعة الأولى = $\dfrac{١٠ + ٢٠}{٢} = ١٥$

، حيث أن مدى المجموعات = ١٠ ∴ نضيف ١٠ لمراكز المجموعات بالتتابع

**** نكون الجدول الآتى :**

المجموعة	مركز المجموعة م	التكرار ك	م × ك
٢٠٠ –	١٠	٢	٢٠
٢٥٠ –	٢٥	٨	٢٠٠
٣٠٠ –	٣٥	١٧	٥٩٥
٣٥٠ –	٤٥	٢٣	١٠٣٥
٤٠٠ –	٥٥	٧	٣٨٥
٤٥٠ –	٦٥	٣	١٩٥
	٦٠		٢٤٣٠

الوسط الحسابى = $\dfrac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}} = \dfrac{٢٤٣٠}{٦٠} = ٤٠.٥$

تمارين

١ ــ أوجد الوسط الحسابى لكل من مجموعات القيم الآتية :

(١) ٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٢ ، ١٣ ، ٥

(٢) ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٥ ، ٨

(٣) ٢٣ ، ٤٧ ، ٢٤ ، ٥٢ ، ٣٣ ، ١٦

(٤) ٦ ، ٦ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٨ ، ١٠

(٥) ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٢٤ ، ١٠ ، ١١ ، ١١

٢ ــ أوجد الوسط الحسابى لكل من الجداول التكرارية الآتية :

(١)

المجموعات	١٦ ــ	٢٠ ــ	٢٤ ــ	٢٨ ــ	٣٢ ــ	٣٦ ــ
التكرار	٣	٥	١٢	٧	٢	١

(٢)

المجموعات	٦٠ ــ	٧٠ ــ	٨٠ ــ	٩٠ ــ	١٠٠ ــ	١١٠ ــ
التكرار	٤	١٦	١٨	٢٥	١٨	١٩

(٣)

المجموعات	٥ ــ	١٥ ــ	٢٥ ــ	٣٥ ــ	٤٥ ــ	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

(٤)

المجموعات	١٠ ــ	٢٠ ــ	٣٠ ــ	٤٠ ــ	٥٠ ــ	المجموع
التكرار	٣	٤	٢	١	٢	١٢

الوسيط

تعريف :
الوسيط هو القيمة التى تتوسط مجموعة المفردات " القيم " بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

خطوات إيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى :
** ننشأ الجدول التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل ثم نرسم المنحنى التكرارى المتجمع له

** نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

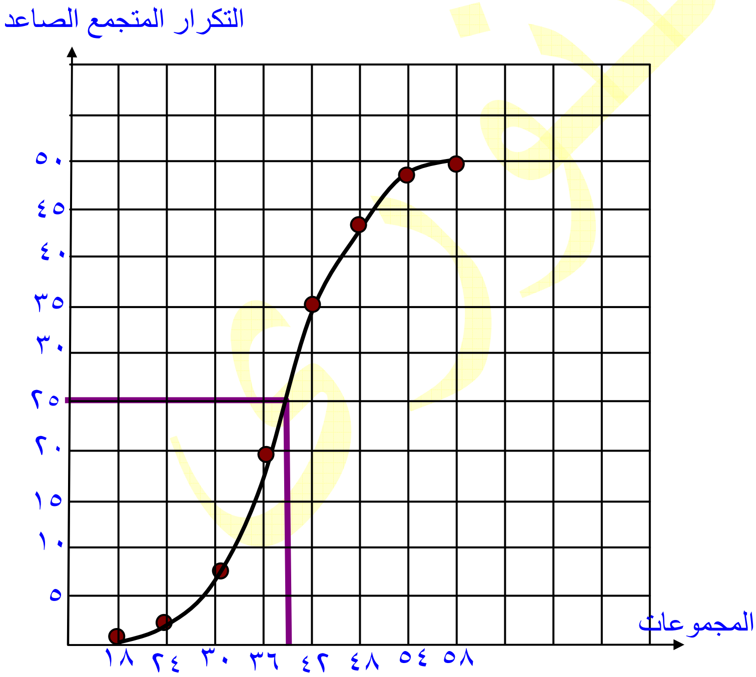
** نحدد نقطة على المحور الرأسى " التكرار المتجمع " والتى تمثل ترتيب الوسيط ثم نرسم منها مستقيماً أفقياً يقطع المنحنى المتجمع فى نقطة نرسم منها عموداً على المحور الأفقى فيقطعه فى نقطة تمثل الوسيط

" وإذا رسمنا المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل معاً فإن الإحداثى الأفقى لنقطة تقاطعهما تمثل الوسيط "

مثال : أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :
الحل
عن طريق المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

ا لمجموعات	١٨ –	٢٤ –	٣٠ –	٣٦ –	٤٢ –	٤٨ –	٥٤ –	المجموع
ا لتكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٨	صفر
أقل من ٢٤	٢
أقل من ٣٠	٦
أقل من ٣٦	١٦
أقل من ٤٢	٣٤
أقل من ٤٨	٤٢
أقل من ٥٤	٤٨
أقل من ٥٨	٥٠

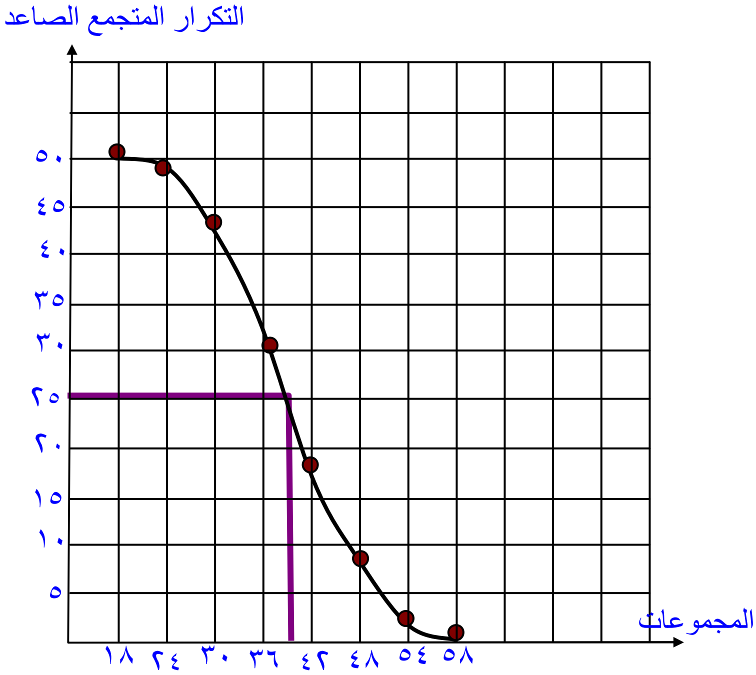


ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

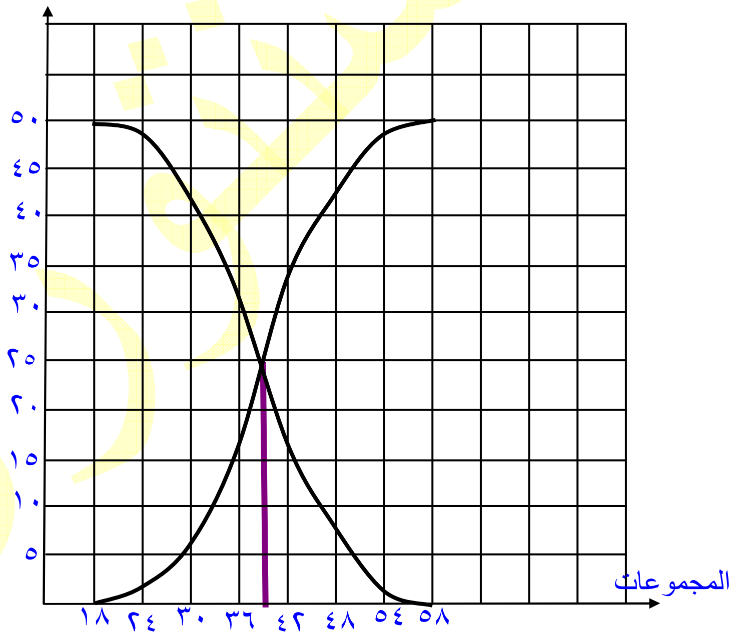
من الرسم الوسيط = ٤٠.٦

من المنحنى التكرارى المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٨ فأكثر	٥٠
٢٤ فأكثر	٤٨
٣٠ فأكثر	٤٤
٣٦ فأكثر	٣٤
٤٢ فأكثر	١٦
٤٨ فأكثر	٨
٥٤ فأكثر	٢
٥٨ فأكثر	صفر



من المنحنيين معاً :



أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

تمارين

أوجد الوسيط لكل من الجداول التكرارية الآتية :

(١)

المجموعات	٢ –	٤ –	٦ –	٨ –	١٠ –	المجموع
التكرار	٢	٢٠	١٢	٩	٧	٥٠

(٢)

المجموعات	١٠ –	١١ –	١٢ –	١٣ –	١٤ –	١٥ –
التكرار	١	٤	٨	١٣	٣	١

(٣)

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	٥٥ –
التكرار	١٥	١٧	٢٣	٣٠	٢٢	٣

(٤)

المجموعات	١٦ –	٢٠ –	٢٤ –	٢٨ –	٣٢ –	٣٦ –
التكرار	١	٧	١٢	٥	٣	٢

(٥)

المجموعات	٣٠ –	٦٥ –	٧٠ –	٧٥ –	٨٠ –	المجموع
التكرار	١	٥	١٥	٧	٢	٣٠

(٦)

المجموعات	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –
التكرار	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨

المنوال

تعريف :

المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً فى مجموعة المفردات " القيم "
أى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها من القيم

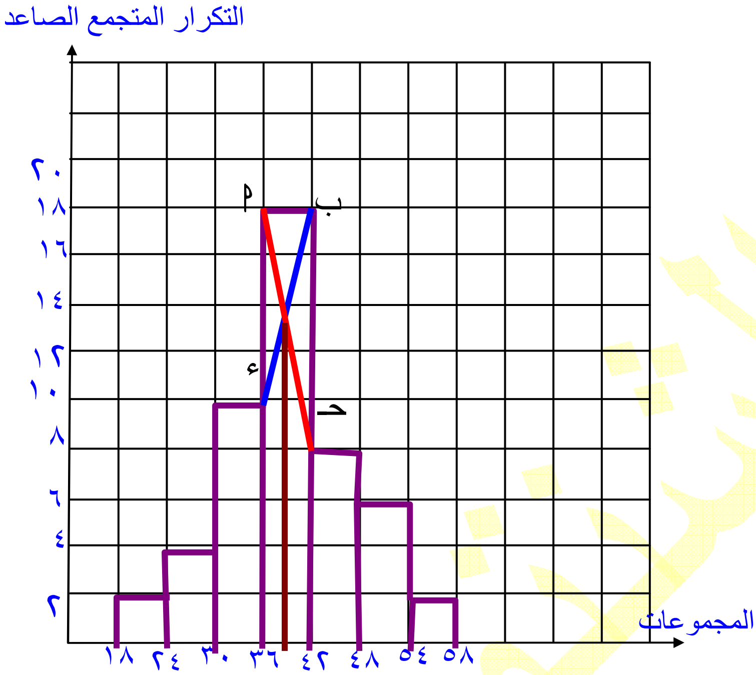
لإيجاد المنوال لجدول تكرارى ذى مجموعات لاحظ المثال الآتى :

مثال : أوجد المنوال للجدول التكرارى الآتى :

نرسم المدرج التكرارى كالآتى :

**** نرسم محورين أحدهما أفقى للمجموعات والآخر رأسى للتكرار**

ا لمجموعات	١٨ ــ	٢٤ ــ	٣٠ ــ	٣٦ ــ	٤٢ ــ	٤٨ ــ	٥٤ ــ	المجموع
ا لتكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠



**** نستخدم مقياس رسم مناسب للمحورين**
**** نرسم مستطيلات متلاصقة كما بالشكل المقابل**
بحيث يكون عرض كل منها مدى المجموعة
طول كل منها تكرار المجموعات بالترتيب

إيجاد المنوال :

**** المنوال يتحدد من المجموعة المنوالية وهى الأكثر تكراراً**

**** نحدد نقطة تقاطع م حـ ، ب ء**
و نسقط منها عموداً على المحور الأفقى
يحدد القيمة المنوالية
المنوال = ٤١

أحمد الشنتورى
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

تمارين

أوجد المنوال لكل من الجداول التكرارية الآتية :

(١)

المجموعات	٣ –	٤ –	٥ –	٦ –	٧ –	المجموع
التكرار	٣	٢٠	١٢	٩	٧	٥٠

(٢)

المجموعات	١٠ –	١١ –	١٢ –	١٣ –	١٤ –	١٥ –
التكرار	١	٤	٨	١٣	٣	١

(٣)

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	٥٥ –
التكرار	١٥	١٧	٢٣	٣٠	٢٢	٣

(٤)

المجموعات	١٦ –	٢٠ –	٢٤ –	٢٨ –	٣٢ –	٣٦ –
التكرار	١	٧	١٢	٥	٣	٢

(٥)

المجموعات	٦٠ –	٦٥ –	٧٠ –	٧٥ –	٨٠ –	المجموع
التكرار	١	٥	٥	٧	٢	٣٠

(٦)

المجموعات	٨٠ –	٩٠ –	١٠٠ –	١١٠ –	١٢٠ –	المجموع
التكرار	٤	١٣	٤٥	٢٣	١٥	١٠٠